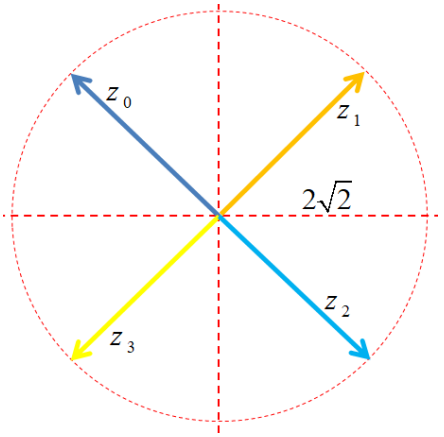
جامعة الفرات - كلية العلوم - قسم الرياضيات
سلم تصحيح امتحان مقرر التحليل العقدي (١) - السنة الثالثة
الدورة الفصلية الثانية من العام الدراسي ٢٠٢٤ / ٢٠٢٥

الدرجة الكلية: ١٠٠ درجة

السؤال الأول (٣٠ درجة):

(i) لدينا $w=\left\|\frac{z+i}{1-iz}\right\|=\left\|\frac{(x+iy)+i}{1-i(x+iy)}\right\|=\left\|\frac{x+i(y+1)}{(1+y)-ix}\right\|$ $=\frac{\left\|x+i(y+1)\right\|}{\left\|(1+y)-ix\right\|}=\frac{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{\sqrt{(y+1)^2+x^2}}=1$	١٠ درجات
(ii) نعلم أن $-4=4\times(-1)=4e^{i(\pi+2\pi k)}$، فيكون $(-4)^{3/4}=\left[4e^{i(\pi+2\pi k)}\right]^{3/4}=[4]^{3/4}\left[e^{i(\pi+2\pi k)}\right]^{3/4}=\left[4^{1/4}\right]^3 e^{i\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi k\right)}$ $=\left[\sqrt{2}\right]^3 e^{i\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi k\right)}=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi k\right)}\quad;\quad k\in\mathbb{Z}$ ولإيجاد القيم العقدية المختلفة لهذا المقدار السابق، نعطي قيم مختلفة للمقدار الصحيح $k\in\mathbb{Z}$ كما يلي $k=0\ \Rightarrow\ z_0=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3}{4}\pi\right)}$ $k=1\ \Rightarrow$ $z_1=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{2}\pi\right)}=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{9}{4}\pi\right)}=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{1}{4}\pi\right)}$ $k=2\ \Rightarrow$ $z_2=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{6}{2}\pi\right)}=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{15}{4}\pi\right)}=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{7}{4}\pi\right)}$ $k=3\ \Rightarrow$ $z_3=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{9}{2}\pi\right)}=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{21}{4}\pi\right)}=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{5}{4}\pi\right)}$ 	٢٠ درجة

مدرس المقرر:
أ. د. محمد شعيب العلي

عميد الكلية:
د. نورس الهلامي

السؤال الثاني (٤٠ درجة):

(i) لدينا من أجل أي عددين عقديين $z_1,z_2\in\mathbb{C}$، يكون $\left\|g(z_1)-g(z_2)\right\|=\left\|\left[a\,f(z_1)+b\right]-\left[a\,f(z_2)+b\right]\right\|=\left\|a\,\left[f(z_1)-f(z_2)\right]\right\|$ $=\|a\|\,\left\|f(z_1)-f(z_2)\right\|=1\times\|z_1-z_2\|=\|z_1-z_2\|$ وبالتالي فإن التابع المعطى $g(z)$ إيزومتري.	٥ درجات
(ii) نلاحظ أن التابع $h(z)$ يكتب بالشكل $h(z)=a\,f(z)+b\quad;\quad a=\dfrac{1}{f(1)-f(0)}\,,\,b=\dfrac{f(0)}{f(1)-f(0)}$ حيث أن $\|a\|=\left\|\dfrac{1}{f(1)-f(0)}\right\|=\dfrac{1}{\left\|f(1)-f(0)\right\|}=\dfrac{1}{\|1-0\|}=1$ وبالتالي وحسب الطلب الأول، نستنتج أن التابع $h(z)$ هو تابع إيزومتري. كما نلاحظ أن $h(1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{f(1)-f(0)}=1\quad,\quad h(0)=\dfrac{f(0)-f(0)}{f(1)-f(0)}=0$	٥ درجات
(iii) بملاحظة أن $\|f(z)\|=\|f(z)-0\|=\|f(z)-f(0)\|=\|z-0\|=\|z\|$ $\|1-f(z)\|=\|f(1)-f(z)\|=\|1-z\|\quad\Rightarrow$	٥ درجات

$\|1-f(z)\|^2=\|1-z\|^2 \Rightarrow [1-f(z)]\times\overline{[1-f(z)]}=(1-z)\times\overline{(1-z)} \Rightarrow$ $[1-f(z)]\times[1-\overline{f(z)}]=(1-z)\times(1-\bar{z}) \Rightarrow$ $1-f(z)-\overline{f(z)}+f(z)\times\overline{f(z)}=1-z-\bar{z}+z\times\bar{z} \Rightarrow$ $1-[f(z)+\overline{f(z)}]+\|f(z)\|^2=1-(z+\bar{z})+\|z\|^2 \Rightarrow$ وبما أن $\|f(z)\|=\|z\|$ و $f(z)+\overline{f(z)}=2\mathrm{Re}[f(z)]$ و $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}[z]$ وبالاختصار تصبح العلاقة السابقة بالشكل $\mathrm{Re}[f(z)]=\mathrm{Re}[z]$ وباستخدام هذه العلاقة، نجد أن $\mathrm{Re}[f(i)]=\mathrm{Re}[i]=0 \Rightarrow f(i)=y\,i \Rightarrow \|f(i)\|=\|y\|$ وبما أن $\|f(x)\|=\|x\|$، يكون $\|f(i)\|=\|i\|=1$. وبالمقارنة مع العلاقة الأخيرة نستنتج أن $\|y\|=1$، ويكون $y=\mp 1$. وبالتالي نستنتج أن $f(i)=\mp i$.	١٠ درجات
(iv) لدينا حسب الطلب السابق أن $\|f(z)\|=\|z\| \Rightarrow \|f(z)\|^2=\|z\|^2 \Rightarrow$ $\{\mathrm{Re}[f(z)]\}^2+\{\mathrm{Im}[f(z)]\}^2=\{\mathrm{Re}[z]\}^2+\{\mathrm{Im}[z]\}^2$ وبما أن $\mathrm{Re}[f(z)]=\mathrm{Re}[z]$ وبالاختصار نجد أن $\{\mathrm{Im}[f(z)]\}^2=\{\mathrm{Im}[z]\}^2 \Rightarrow \mathrm{Im}[f(z)]=\mp\mathrm{Im}[z]$ ..... (*) وبما أن $f(i)=i$ فرضاً، فإننا نقبل $\mathrm{Im}[f(z)]=\mathrm{Im}[z]$ ونرفض $\mathrm{Im}[f(z)]=-\mathrm{Im}[z]$. وبالتالي يصبح لدينا $f(z)=\mathrm{Re}[f(z)]+i\,\mathrm{Im}[f(z)]=\mathrm{Re}[z]+i\,\mathrm{Im}[z]=z$	١٠ درجات

(v) بما أن $f\left(i\right)=-i$ فرضاً، فإننا نقبل $\mathrm{Im}\left[f\left(z\right)\right]=-\mathrm{Im}\left[z\right]$ ونرفض $\mathrm{Im}\left[f\left(z\right)\right]=\mathrm{Im}\left[z\right]$ في العلاقة $(*)$. وبالتالي يصبح لدينا $$f\left(z\right)=\mathrm{Re}\left[f\left(z\right)\right]+i\ \mathrm{Im}\left[f\left(z\right)\right]=\mathrm{Re}\left[z\right]-i\ \mathrm{Im}\left[z\right]=\overline{z}$$	٥ درجات

السؤال الثالث (٣٠ درجة):

(i) من أجل أي عدد عقدي $z=x+i\ y$، ليكن $f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+i\ v\left(x,y\right)$ تابعاً تحليلياً ذو قيم حقيقية، عندئذٍ يكون $v\left(x,y\right)=0$. وبما أن التابع تحليلي فإنه يحقق شرطي كوشي ريمان، أي أن $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\Rightarrow\ u\left(x,y\right)=Const\ \Rightarrow\ f\left(z\right)=Const$$	١٠ درجات
(ii) نلاحظ أن $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{x}Sin\left(y\right)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{x}Cos\left(y\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=e^{x}Sin\left(y\right)\\ \dfrac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}=-e^{x}Sin\left(y\right)\end{cases}\Rightarrow\ \frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}=0$$ وبالتالي فإن التابع $u\left(x,y\right)=e^{x}Sin\left(y\right)$ هو تابع توافقي. ولإيجاد المرافق التوافقي لهذا التابع نستخدم المعادلات $$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{x}Sin\left(y\right)\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}Cos\left(y\right)\end{cases}\qquad(*)$$	١٠ درجات

بمكاملة طرفي المعادلة الأولى بالنسبة للمتحول y، نجد أن $v=\int e^{x}Sin(y)dy+\phi(x) \Rightarrow$ $v=-e^{x}Cos(y)+\phi(x)$ (**) وباشتقاق الطرفين جزئياً بالنسبة للمتحول x والتعويض في المعادلة الثانية من (*)، نجد أن $-e^{x}Cos(y)+\phi'(x)=-e^{x}Cos(y) \Rightarrow \phi'(x)=0 \Rightarrow \phi(x)=0$ نعوض في المعادلة (**)، لنجد أن $v=-e^{x}Cos(y)$ وبالتالي فإن التابع التحليلي المطلوب هو $f(z)=u+iv=e^{x}Sin(y)-i\ e^{x}Cos(y)$ $=e^{x}\left[Sin(y)-i\ Cos(y)\right]=-i\ e^{x}\left[Cos(y)+i\ Sin(y)\right]$ $=-i\ e^{x}e^{iy}=-i\ e^{x+iy}=-i\ e^{z}$	١٠ درجات

انتهى سلم التصحيح (خمس صفحات)